

9.12.

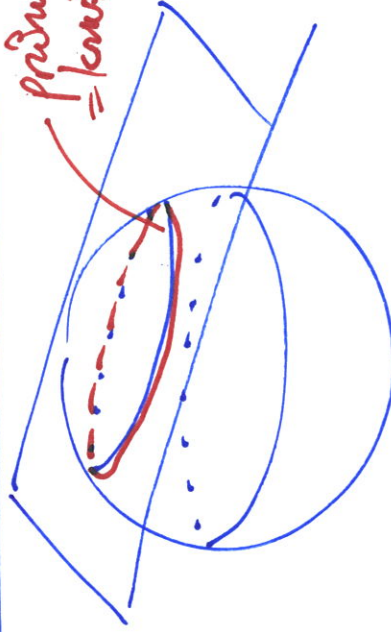
Další optimalizační úlohy:

$$\boxed{1} \quad f(x, y, z) = x - 3y + 2z$$

$$\text{vážený } g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{59}{4} = 0$$

$$g_2(x, y, z) = x + y + z - \frac{3}{2} = 0$$

průnik
= kružnice



G_1 : sfera

G_2 : rovina

$$\begin{aligned} L(x, y, z, d_1, d_2) &= f + d_1 g_1 + d_2 g_2 = \\ &= x - 3y + 2z + d_1 \left(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{59}{4} \right) + \\ &\quad + d_2 \left(x + y + z - \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\partial_x L = 1 + 2d_1 x + d_2 = 0 \quad (1)$$

$$\partial_y L = -3 + 2d_1 y + d_2 = 0 \quad (2)$$

$$\partial_z L = 2 + 2d_1 z + d_2 = 0 \quad (3)$$

$$\partial_{d_1} L = g_1 = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{59}{4} = 0 \quad (4)$$

$$\partial_{d_2} L = g_2 = x + y + z - \frac{3}{2} = 0 \quad (5)$$

Nejprve z (1), (2), (3) vyjádříme x, y, z pomocí d_1, d_2 :

$$(1) \quad 2d_1 x = -d_2 - 1 \quad / : 2d_1$$

$$x = \frac{-d_2 - 1}{2d_1}$$

$$(2) \quad 2d_1 y = -d_2 + 3 \quad / : 2d_1$$

$$y = \frac{-d_2 + 3}{2d_1}$$

$$(3) \quad 2d_1 z = -d_2 - 2 \quad / : 2d_1$$

$$z = \frac{-d_2 - 2}{2d_1}$$

2. Nedošlame nulou?

Kdyby $d_1 = 0$, pak by

$$(1) \quad 1 + d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = -1$$

$$(2) \quad -3 + d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = 3$$

nejde zároveň

a proto $d_1 \neq 0 \Rightarrow \text{OK}$.

Tyto 3 rovnice dosadíme nejprve do lineárních rovnic (j. jednoduší)

tj. do (5): $x + y + z = \frac{3}{2}$

$$\frac{-d_2 - 1}{2d_1} + \frac{-d_2 + 3}{2d_1} + \frac{-d_2 - 2}{2d_1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{-3d_2 + 0}{2d_1} = \frac{3}{2} \quad / \cdot \frac{2}{3}$$

$$-\frac{d_2}{d_1} = 1 \quad / \cdot d_1$$

$$\boxed{-d_2 = d_1}$$

Toto dosadíme do rovnice

pro x, y, z :

$$x = \frac{d_1 - 1}{2d_1}, \quad y = \frac{d_1 + 3}{2d_1}, \quad z = \frac{d_1 - 2}{2d_1}$$

A toto dosadíme do (4):

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{59}{4}$$

$$\left(\frac{d_1 - 1}{2d_1}\right)^2 + \left(\frac{d_1 + 3}{2d_1}\right)^2 + \left(\frac{d_1 - 2}{2d_1}\right)^2 = \frac{59}{4}$$

$$(d_1 - 1)^2 + (d_1 + 3)^2 + (d_1 - 2)^2 = 59d_1^2$$

$$\underline{\underline{d_1^2 - 2d_1 + 1 + d_1^2 + 6d_1 + 9 + d_1^2 - 4d_1 + 4 = 59d_1^2}}$$

$$3d_1^2 + 14 = 59d_1^2 \quad / - 3d_1^2$$

$$14 = 56d_1^2 \quad / : 56$$

$$\frac{1}{4} = d_1^2$$

$$\boxed{d_1 = \pm \frac{1}{2}}$$

Tyto dosadíme do vztahů

pro x_1, y_1, z :

a) $d_1 = \frac{1}{2}$: $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \right]$

b) $d_1 = -\frac{1}{2}$: $B = \left[\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right]$

Tyto 2 kandidáty dosadíme

do fce f :

$$f(A) = \underbrace{(-14)}_{\text{MIN}}, \quad f(B) = \underbrace{(14)}_{\text{MAX}}$$

Metoda jacobianu pro
3 proměnné a 2 vazby

Def: determinant matice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Diagram showing the calculation of the determinant for a 3x3 matrix. The matrix is written with elements a_{11}, a_{12}, a_{13} in the first row, a_{21}, a_{22}, a_{23} in the second row, and a_{31}, a_{32}, a_{33} in the third row. Green lines and signs indicate the positive terms: $+$ for $a_{11}a_{22}a_{33}$, $+$ for $a_{12}a_{23}a_{31}$, and $+$ for $a_{13}a_{21}a_{32}$. Red lines and signs indicate the negative terms: $-$ for $a_{13}a_{22}a_{31}$, $-$ for $a_{11}a_{23}a_{32}$, and $-$ for $a_{12}a_{21}a_{33}$.

$$\det A = |A| =$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

"Sarrusovo pravidlo"

Pozn: determinant lze definovat
pro n čtvercovou matici
(tj. rozměru $n \times n$), má platí
 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ sdílců

Náme-li fci $f(x, y, z)$
a 2 rovnice
 $g_1(x, y, z) = 0$
 $g_2(x, y, z) = 0$,
vytvóříme jacobské matice:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{jacobian} = \det J$$

Pak kandidáti na extrém
jsou řešením soustavy

$$\boxed{\begin{array}{l} \det J = 0 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{array}}$$

Pr: zkusm příklad [1]:

$$f = x - 3y + 2z$$

$$g_1 = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{59}{4} = 0$$

$$g_2 = x + y + z - \frac{3}{2} = 0$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} -3 \\ 2x & 2y \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det J &= 2y - 6z + 4x - 4y - 2z + 6x = \\ &= 10x - 2y - 8z = 2(5x - y - 4z) \end{aligned}$$

$$\text{soustava: } 5x - y - 4z = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{59}{4} \quad (2)$$

$$x + y + z = \frac{3}{2} \quad (3)$$

Napadne nás řešit (1) + (3):

$$6x - 3z = \frac{3}{2}$$

$$6x - \frac{3}{2} = 3z \quad / : 3$$

$$\boxed{z = 2x - \frac{1}{2}}$$

Ďalej vyjadríme i y pomocou x,

keďže z (3):

$$x + y + (2x - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \quad / + \frac{1}{2}$$

$$y + 3x = 2$$

$$\boxed{y = -3x + 2}$$

Toto sme dosadíme do (2):

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{59}{4}$$

$$x^2 + (-3x + 2)^2 + (2x - \frac{1}{2})^2 = \frac{59}{4}$$

$$\underline{\underline{x^2 + 9x^2 - 12x + 4 + 4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = \frac{59}{4}}}$$

$$14x^2 - 14x + \frac{17}{4} = \frac{59}{4} \quad / - \frac{59}{4}$$

$$14x^2 - 14x - \frac{42}{4} = 0 \quad / : 14$$

$$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-\frac{3}{4}) = 1 + 3 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 2}{2} = \left\{ \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$$

Dopocteme y, z ... vyjde

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \right]$$

$$B = \left[\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right]$$

} skýme
jako LM

Porovnanie method Jac a LM:

① Jac je menej pracnas než LM

(konstata 3x3 versus 5x5)

② Jac ale nemůžeme spočítat hodnoty d_1, d_2 (význam v ekonomii: stínová cena)

③ Jac lze považovat pouze tehdy, je-li počet var. 0 1 menší než počet proměnných (tzn.: 2 prom. - 1 var. 3 prom. - 2 var.)

Důvod: determinant je def. jen pro čtvercové matice, např. 3 prom. - 1 var. má Jac matici 2×3 !

④ LM je univerzální metoda, lze ji považovat vždy

[2] Uřešte extrém fce

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

na množině $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\}$

$$2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 6$$

$M =$ elipsoid (plný)

① kandidátní množina $M =$

specim. body fce f v M :

$$\partial_x f = 2x = 0 \quad \text{řešení}$$

$$\partial_y f = 2y = 0$$

$$\partial_z f = 2z = 0$$

$$A = [0, 0, 0] \in M$$

je kandidát

② kandidátní množina M :

LM je dle var. 1

$$g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 6 = 0$$

Máme 3 proměnné a 1 rovnici
nejde použít Jac, musíme
použít LM:

$$L(x, y, z, d) = x^2 + y^2 + z^2 + d(2x^2 + y^2 + 3z^2 - 6)$$

$$\partial_x L = 2x + 4dx = 0 \quad (1)$$

$$\partial_y L = 2y + 2dy = 0 \quad (2)$$

$$\partial_z L = 2z + 6dz = 0 \quad (3)$$

$$\partial_d L = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 6 = 0 \quad (4)$$

Řešíme soustavu: upravené (1):

$$2x(1+2d) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \text{ možností: } \begin{cases} x=0 \\ 1+2d=0 \end{cases}$$

$$\text{podle (2): } 2y(1+d) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \text{ možností: } \begin{cases} y=0 \\ 1+d=0 \end{cases}$$

$$(3): 2z(1+3d) = 0 \\ \Rightarrow 2 \text{ možností: } \begin{cases} z=0 \\ 1+3d=0 \end{cases}$$

Teoreticky máme $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
možností - (ve skutečnosti
jich bude méně):

Přep. nejprve řešíme (1) pak
~~4~~ $1+2d=0$, potom

$n(2)$ nemůžeme nastat $1+d=0$

a proto $y=0$; podobně $v(3)$
nemůžeme být $1+3d=0$, a proto

$z=0$. Tedy $y=z=0$, dostaneme

$$x \text{ ze (4): } 2x^2 + 0^2 + 3 \cdot 0^2 = 6$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

$$\underline{B}_{\pm} = [\pm \sqrt{3}, 0, 0] \text{ kandidati.}$$

Řešme, předpokládáme-li:

ve (2): $1+d=0$, pak můžeme

$n(1): x=0$
 $n(3): z=0$ } dosadíme do (1):

$$2 \cdot 0^2 + y^2 + 3 \cdot 0^2 = 6$$

$$y^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{6}$$

$$C_{\pm} = [0, \pm\sqrt{6}, 0]$$

Řešme v (3) předp. $1+3d=0$,

pak v (1): $x=0$
v (2): $y=0$ } dosadíme do (4):

$$2 \cdot 0^2 + 0^2 + 3 \cdot z^2 = 6$$

$$z^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{2}$$

$$D_{\pm} = [0, 0, \pm\sqrt{2}]$$

zbývá jediná možnost, a to

$$x=y=z=0, \text{ a to je}$$

$$\text{bod } A = \{0, 0, 0\} \in M^0.$$

Dosaďme:

$$A: f(0, 0, 0) = \underline{\underline{0 \text{ MIN}}}$$

$$B_{\pm}: f(\pm\sqrt{3}, 0, 0) = 3$$

$$C_{\pm}: f(0, \pm\sqrt{6}, 0) = \underline{\underline{6 \text{ MAX}}}$$

$$D_{\pm}: f(0, 0, \pm\sqrt{2}) = 2$$

ve 2 bodech!